UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE AVANCÉE

EXAMEN SEMESTRIEL (1H45MN)

Exercice 1. (7 pts)

Un atelier de production dispose de deux machines M_1 et M_2 qui peuvent fonctionner en parallèle. Au début de chaque mois, un ensemble de n commandes (tâches) est proposé à l'atelier pour réalisation. La plupart du temps, il y en a trop pour être réalisées. Le responsable d'atelier doit alors décider quelles sont les tâches qui sont acceptées par son atelier (celles qui peuvent être réalisées dans le mois), et sur quelle machine elles s'effectuent. Pour une tâche i la durée n'est pas la même selon la machine qu'on utilise, Elle nécessite une durée a_i sur la machine M_1 et une durée b_i sur la machine M_2. La durée ouvrable (disponible) pour les deux machines est égale à D. De plus, le fait d'accepter une tâche i induit un profit w_i pour l'entreprise qui peut la facturer au client.

1. Modéliser ce problème par un programme linéaire (Expliciter la définition des variables, des contraintes et de la fonction objectif).
2. Écrire le problème de reconnaissance associé puis montrer qu'il est dans la classe NP.
3. Pour ce mois-ci, un des clients a exigé que les tâches 1 et 2 qu'il a commandées soient effectuées par la même machine. Formuler cette contrainte.

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x_{ij}, i = 1..n; j = 1, 2$ définis comme suit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tâche } i \text{ est affectée à la machine } j. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les contraintes s'écrivent alors comme suit :

– Chaque tâche est affectée à au plus une seule des deux machines :

$$x_{i1} + x_{i2} \leq 1, \qquad \forall i = 1..n.$$

– Le temps d'exécution des tâches par la machine M_1 ne doit pas excéder D :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{i1} \leq D$$

– Le temps d'exécution des tâches par la machine M_2 ne doit pas excéder D :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{i2} \leq D$$

L'objectif est alors de maximiser le profit total obtenu de la réalisation des tâches sur les deux machines :

$$\max Z = \sum_{i=1}^{n} w_i (x_{i1} + x_{i2})$$

2. Ce problème d'optimisation peut s'écrire comme suit :

   "Trouver une partition des tâches en trois sous-ensembles T_1, T_2 et T_3 tel que la durée totale d'exécution des tâches de l'ensemble $T_j, j = 1.2$ ne doit pas excéder D tel que le profit de cette partition soit maximum."

   Par conséquent, on peut écrire le problème de reconnaissance associé, comme suit :

   Pb-Affect-Machine : Étant donné un ensemble T de n tâches et deux machines M_1 et M_2 de disponibilité D chacune. Chaque tâche i a un temps d'exécution a_i sur M_1 et b_i sur M_2. Existe t-il une partition de $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ telle que la durée totale d'exécution des tâches de l'ensemble $T_j, j = 1.2$ ne doit pas excéder D et son profit soit $\geq a$? a donné.

   On définit alors un certificat $C = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ une partition de T et on propose alors l'algorithme suivant :

Algorithme Algorithme de vérification de C

Entrée: $C = T_1 \cup T_2 \cup T_3, D, a, a_i, b_i, w_i, i = 1..n$

Sortie: $Affect$: Booléen

$S_1 \leftarrow 0$
$S_2 \leftarrow 0$
$W \leftarrow 0$
$Affect \leftarrow VRAI$
Pour tout $t \in T_1$ **Faire**
  $S_1 \leftarrow S_1 + a_t$
  $W \leftarrow W + w_t$
Fin Pour
Pour tout $t \in T_2$ **Faire**
  $S_2 \leftarrow S_2 + b_t$
  $W \leftarrow W + w_t$
Fin Pour
Si $S_1 > D$ ou $S_2 > D$ ou $W < a$ **Alors**
  $Affect \leftarrow FAUX$
Fin Si

   Il est facile de voir que cet algorithme est de complexité $O(n)$, par conséquent Pb-Affect-Machine$\in$ NP.

3. La condition exigée par le client (les tâches 1 et 2 doivent être effectuées par la même machine) va se formuler comme suit :
   - $x_{11} = x_{21}$
   - $x_{12} = x_{22}$

Exercice 2. (6 pts)

Une entreprise de construction a quatre projets en cours. Selon la répartition actuelle de la main-d'œuvre, des équipements, et des matériaux, les quatre projets peuvent être réalisés en 15, 20, 18 et 25 semaines. La direction souhaite réduire le temps de réalisation de ces projets et a décidé d'allouer 2 000 000 DA supplémentaires aux quatre projets. Les nouveaux délais d'exécution en fonction des fonds supplémentaires alloués à chaque projet sont indiqués dans le tableau suivant :

Fonds supplémentaires ($\times$100 000 DA)	Projet 1	Projet 2	Projet 3	Projet 4
0	15	20	18	25
5	12	16	16	20
10	10	13	14	18
15	8	11	10	16
20	7	9	9	14

1. Formuler le problème de répartition des fonds supplémentaires qui minimise la durée de réalisation de ces projets.
2. En supposant que les fonds supplémentaires ne peuvent être allouées qu'en blocs de 500 000 DA, Trouver, par programmation dynamique, la meilleure stratégie d'allocation.

Solution de l'exercice 2

1. On définit z_i le fonds alloué au projet $i, 1..4$. On alors

$$(P)\begin{cases}\min \sum_{i=1}^{4} d_i(z_i)\\ \sum_{i=1}^{4} z_i = 2000000\\ z_i = 500000 \times k, k \in \mathbb{N}\end{cases} \iff (P)\begin{cases}\min \sum_{i=1}^{4} d_i(x_i)\\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 4\\ x_i \in \mathbb{N}, i = 1..4\end{cases}$$

   où $z_i = 500000 \times x_i$ et $d_i(x_i) = d_i(z_i)$ est la durée de réalisation du projet i après l'allocation de z_i du fond supplémentaire.

2. On écrit $P_k(\alpha)$ comme suit :

$$(P_k(\alpha))\begin{cases}\min \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i)\\ \sum_{i=1}^{k} x_i = \alpha\\ x_i \in \mathbb{N}, i = 1..k\end{cases}$$

   avec $0 \leq \alpha \leq 4$. La relation de récurrence s'écrit alors :

$$Z_k(\alpha) = \min_{0 \leq x_k \leq \alpha} [d_k(x_k) + Z_{k-1}(\alpha - x_k)]$$

   – $k = 1$:

$$(P_1(\alpha))\begin{cases}\min d_1(x_1)\\ x_1 = \alpha\\ x_1 \in \mathbb{N}\end{cases}$$

$$Z_1(\alpha) = \min_{x_1 = \alpha} [d_1(x_1)]$$

   avec $0 \leq \alpha \leq 4$.
   $\alpha = 0 :\ \ Z_1(0) = 15, x_1 = 0,$
   $\alpha = 1 :\ \ Z_1(1) = 12, x_1 = 1,$
   $\alpha = 2 :\ \ Z_1(2) = 10, x_1 = 2,$
   $\alpha = 3 :\ \ Z_1(3) = 8, x_1 = 3,$
   $\alpha = 4 :\ \ Z_1(4) = 7, x_1 = 4.$

– $k = 2$:

$$(P_2(\alpha)) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{2} d_i(x_i) \\ \sum_{i=1}^{2} x_i = \alpha \\ x_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2 \end{cases}$$

$$Z_2(\alpha) = \min_{0 \leq x_2 \leq \alpha} [d_2(x_2) + Z_1(\alpha - x_2)]$$

avec $0 \leq \alpha \leq 4$.
$\alpha = 0 :\ \ Z_2(0) = \min_{0 \leq x_2 \leq 0} [d_2(x_2) + Z_1(0)] = 35, x_2 = 0,$
$\alpha = 1 :\ \ Z_2(1) = \min_{0 \leq x_2 \leq 1} [d_2(x_2) + Z_1(1 - x_2)] = 31, x_2 = 1,$
$\alpha = 2 :\ \ Z_2(2) = \min_{0 \leq x_2 \leq 2} [d_2(x_2) + Z_1(2 - x_2)] = 28, x_2 = 1 \vee 2,$
$\alpha = 3 :\ \ Z_2(3) = \min_{0 \leq x_2 \leq 3} [d_2(x_2) + Z_1(3 - x_2)] = 25, x_2 = 2,$
$\alpha = 4 :\ \ Z_2(4) = \min_{0 \leq x_2 \leq 4} [d_2(x_2) + Z_1(4 - x_2)] = 22, x_2 = 3,$

– $k = 3$:

$$(P_3(\alpha)) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{3} d_i(x_i) \\ \sum_{i=1}^{3} x_i = \alpha \\ x_i \in \mathbb{N}, i = 1..3 \end{cases}$$

$$Z_3(\alpha) = \min_{0 \leq x_3 \leq \alpha} [d_3(x_3) + Z_2(\alpha - x_3)]$$

avec $0 \leq \alpha \leq 4$.
$\alpha = 0 :\ \ Z_3(0) = \min_{0 \leq x_3 \leq 0} [d_3(x_3) + Z_2(0)] = 53, x_3 = 0,$
$\alpha = 1 :\ \ Z_3(1) = \min_{0 \leq x_3 \leq 1} [d_3(x_3) + Z_2(1 - x_3)] = 49, x_3 = 0,$
$\alpha = 2 :\ \ Z_3(2) = \min_{0 \leq x_3 \leq 2} [d_3(x_3) + Z_2(2 - x_3)] = 46, x_3 = 0,$
$\alpha = 3 :\ \ Z_3(3) = \min_{0 \leq x_3 \leq 3} [d_3(x_3) + Z_2(3 - x_3)] = 43, x_3 = 0,$
$\alpha = 4 :\ \ Z_3(4) = \min_{0 \leq x_3 \leq 4} [d_3(x_3) + Z_2(4 - x_3)] = 40, x_3 = 0,$

– $k = 4$:

$$(P) = (P_4(\alpha)) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{4} d_i(x_i) \\ \sum_{i=1}^{3} x_i = \alpha = 4 \\ x_i \in \mathbb{N}, i = 1..4 \end{cases}$$

$$Z_4(\alpha) = \min_{0 \leq x_4 \leq \alpha} [d_4(x_4) + Z_3(\alpha - x_4)]$$

avec $\alpha = 4$.
$Z_4(4) = \min_{0 \leq x_4 \leq 4} [d_4(x_4) + Z_3(4 - x_4)] = 63, x_4 = 1$. Les calculs sont résumés dans le tableau suivant :

α	Z_1	x_1	Z_2	x_2	Z_3	x_3	Z_4	x_4
0	15	0	35	0	53	0	-	-
1	12	1	31	1	49	0	-	-
2	10	2	28	1,2	46	0	-	-
3	8	3	25	2	43	0	-	-
4	7	4	23	2,3	41	0,1,3	63	1

La solution optimale est alors définie comme suit :

$k = 4: \quad \alpha = 4 \Rightarrow x_4 = 1,$
$k = 3: \quad \alpha = 3 \Rightarrow x_3 = 0,$
$k = 2: \quad \alpha = 3 \Rightarrow x_2 = 2,$
$k = 1: \quad \alpha = 1 \Rightarrow x_1 = 1,$
Donc la meilleure stratégie est d'allouer 500 000 DA au projets 1 et 4 chacun et 1 000 000 DA au projet 2. La durée optimale est alors de 63 semaines.

Exercice 3. (7 pts)

Un artisan fabrique des armoires et des tables. Une armoire nécessite $1h$ de travail et $9m^2$ de bois ; Une table nécessite $1h$ de travail et $5m^2$ de bois. On dispose de $6h$ de travail et de $45m^2$ de bois. Chaque armoire génère un profit de 8 U.M et chaque table 5 U.M.

1. Formuler le problème P qui maximise le profit de cet artisan par un P.L.N.E.
2. Trouver par séparation et évaluation le plan de fabrication optimal.

Solution de l'exercice 3

1. on définit les variables suivantes :
   – x est le nombre des armoires à fabriquer,
   – y est le nombre de tables à fabriquer.
   On a alors le P.L.N.E suivant :

$$(P)\begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. On a

$$(P')\begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(0,0) \Rightarrow & Z(A) = 0 \\ B(5,0) \Rightarrow & Z(B) = 40 \\ C(0,6) \Rightarrow & Z(C) = 30 \\ D(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}) \Rightarrow & Z(D) = 41.25 \end{cases}$$

Comme EV(S) n'est pas exacte puisque $x^* = \dfrac{15}{4} \notin \mathbb{N}$, on sépare S selon x, en deux sous ensembles S_1 et S_2 respectivement. On a alors :

$$(P_1')\begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(0,0) \Rightarrow & Z(A) = 0 \\ E(3,0) \Rightarrow & Z(E) = 24 \\ C(0,6) \Rightarrow & Z(C) = 30 \\ F(3,3) \Rightarrow & Z(F) = 39 \end{cases}$$

On a EV(S_1)=39 est une évaluation exacte. On stérilise S_1.

$$(P_2')\begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x \geq 4, y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} G(4,0) \Rightarrow & Z(G) = 32 \\ B(5,0) \Rightarrow & Z(B) = 40 \\ H(4, \frac{9}{5}) \Rightarrow & Z(C) = 41 \end{cases}$$

On a EV(S_2) qui n'est pas exacte puisque $y^* = \dfrac{9}{5} \notin \mathbb{N}$. On sépare S_2 selon y en les deux ensembles S_{21} et S_{22} respectivement. On obtient :

$$(P'_{21}) \begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x \geq 4, y \leq 1, y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} G(4,0) \Rightarrow & Z(G) = 32 \\ I(4,1) \Rightarrow & Z(I) = 37 \\ B(5,0) \Rightarrow & Z(B) = 40 \\ J(\frac{40}{9},1) \Rightarrow & Z(J) = 40.55 \end{cases}$$

$$(P'_{22}) \begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x \geq 4, y \geq 2 \end{cases} \iff S_{22} = \emptyset$$

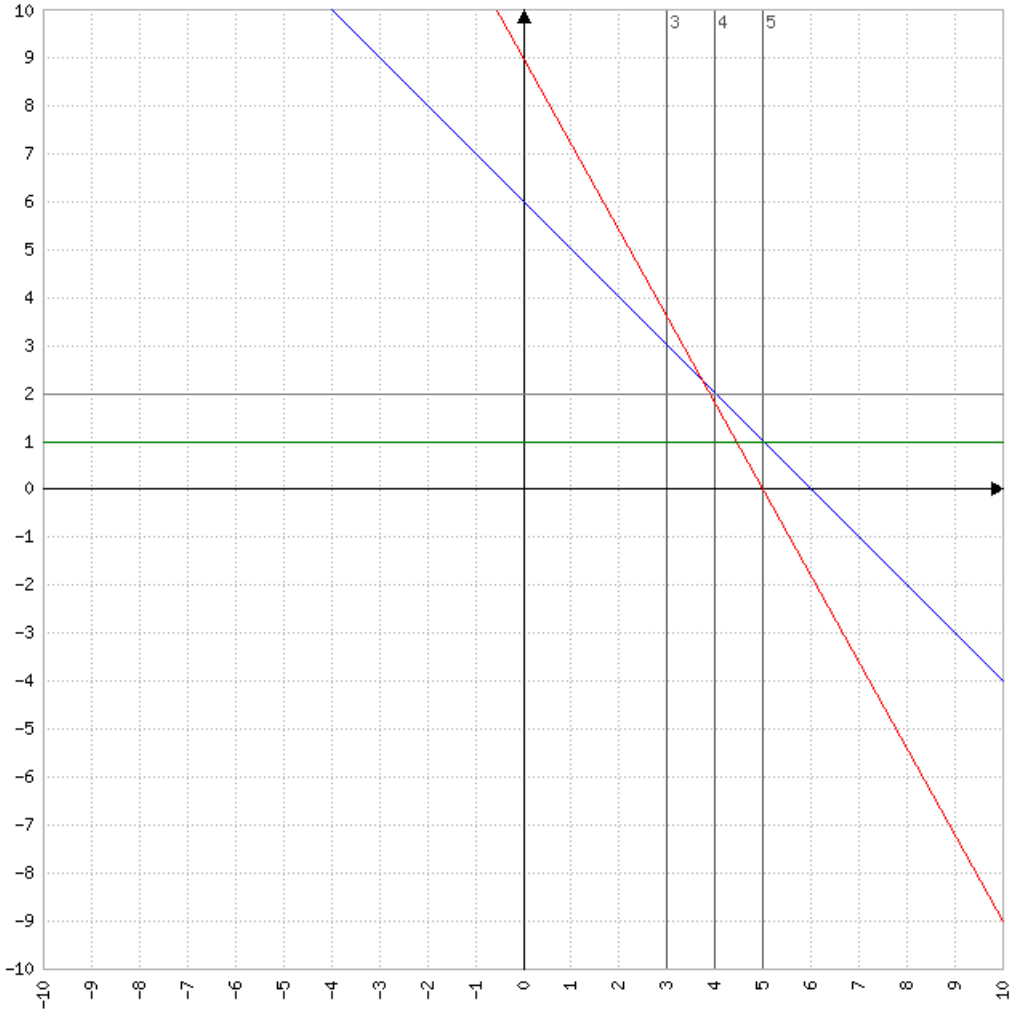
Comme $S_{22} = \emptyset$, on stérilise S_{22}. On a EV(S_{21}) qui n'est pas exacte puisque $x^* = \dfrac{40}{9} \notin \mathbb{N}$. On sépare de nouveau S_{21} selon x en S_{211} et S_{222} respectivement. On obtient :

$$(P'_{211}) \begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x \geq 4, x \leq 4 \\ y \leq 1, y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} G(4,0) \Rightarrow & Z(G) = 32 \\ I(4,1) \Rightarrow & Z(I) = 37 \end{cases}$$

EV(S_{211}) est exacte, on stérilise S_{211}.

$$(P'_{212}) \begin{cases} \max Z = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x \geq 5, \\ y \leq 1, y \geq 0 \end{cases} \iff \left\{ B(5,0) \Rightarrow \quad Z(B) = 40 \right.$$

EV(S_{212}) est exacte, on stérilise S_{212}.
Par conséquent la solution optimale est de fabriquer 5 armoires uniquement avec un profit de 40.


3
4
5