UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET TI
MODULE : PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

EPREUVE SEMESTRIELLE (1H.45MN)

Exercice 1. (6 pts) Un fabricant prépare des films de protection d'écran pour téléphones portables. Il retient trois longueurs pour la diagonale des écrans (et donc pour les films), 4 pouces, 4,7 pouces et 5 pouces. On se limite ici aux possesseurs d'un téléphone avec une de ces trois tailles d'écran.

Une étude de marché indique au fabricant que les écrans de 4 pouces équipent 30 % des téléphones. Cette étude lui indique aussi que 30 % des possesseurs d'écran 4 pouces ont une protection d'écran. C'est aussi le cas de 25 % des possesseurs d'écran 4,7 pouces et de 40 % des possesseurs d'écran 5 pouces.

1. Sachant que 34 % des possesseurs de téléphone possèdent une protection d'écran, calculer le pourcentage de possesseurs d'écran de 4,7 pouces et le pourcentage de possesseurs d'écrans de 5 pouces.
2. On considère un possesseur de protection d'écran. Calculer la probabilité qu'il possède un téléphone avec un écran de 5 pouces.
3. On considère maintenant une personne possédant une protection d'écran et dont le téléphone n'a pas un écran de 4,7 pouces. Calculer la probabilité qu'elle possède un téléphone avec un écran de 5 pouces.

Solution de l'exercice 1

On définit les événements suivants **(1 pt)** :

- A_4 : "La personne a un téléphone avec un écran de 4 pouces."
- $A_{4,7}$: "La personne a un téléphone avec un écran de 4,7 pouces."
- A_5 : "La personne a un téléphone avec un écran de 5 pouces."
  avec
$$P(A_4) + P(A_{4,7}) + P(A_5) = 1. \tag{1}$$
- PR : "La personne a un téléphone avec protection d'écran"

On a alors : $P(A_4) = 0.3$; $P(PR/A_4) = 0.3$; $P(PR/A_{4,7}) = 0.25$; $P(PR/A_5) = 0.4$.

1. **(2pts)** On a $P(PR) = 0.34$. D'autre part d'après la formule des probabilités totales on a :
$$P(PR) = P(PR/A_4)P(A_4) + P(PR/A_{4,7})P(A_{4,7}) + P(PR/A_5)P(A_5) \tag{2}$$
de (1) et (2), on a le système d'équations suivant :
$$\begin{aligned} P(A_{4,7}) + P(A_5) &= 0.7 \\ 0.34 &= 0.09 + 0.25P(A_{4,7}) + 0.4P(A_5) \end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned} P(A_{4,7}) + P(A_5) &= 0.7 \\ P(A_{4,7}) + 1.6P(A_5) &= 1 \end{aligned}$$
en résolvant ce système on obtient : $0.6P(A_5) = 0.3$ Donc $P(A_5) = 0.5$ et donc $P(A_{4,7}) = 0.2$.
2. **(1.5pts)** On cherche $P(A_5/PR)) = \dfrac{P(PR/A_5)P(A_5)}{P(PR)} = \dfrac{0.5 \times 0.4}{0.34} \approx 0.59$

3. **(1.5pts)** On cherche à calculer $P(A_5/PR \cap \overline{A_{4,7}})$.
   Or $\overline{A_{4,7}} = A_4 \cup A_5$. donc $P(A_5/PR \cap \overline{A_{4,7}}) = P(A_5/PR \cap (A_4 \cup A_5)) = \dfrac{P(A_5 \cap [PR \cap (A_4 \cup A_5)])}{P(PR \cap (A_4 \cup A_5))}$.
   D'autre part, on a l'événement " $A_5 \cap [PR \cap (A_4 \cup A_5)]$" qui s'écrit :
   $$A_5 \cap [PR \cap (A_4 \cup A_5)] = (A_5 \cap A_4 \cap PR) \cup (A_5 \cap PR) = A_5 \cap PR.$$
   (Du fait que A_4 et A_5 qui sont incompatibles).
   En remplaçant dans la formule de Bayes, on obtient :
   $$\begin{aligned} P(A_5/PR \cap \overline{A_{4,7}}) &= \frac{P(A_5 \cap PR)}{P(PR \cap (A_4 \cup A_5))} = \frac{P(PR/A_5)P(A_5)}{P(PR/A_5)P(A_5) + P(PR/A_4)P(A_4)} \\ &= \frac{0.4 \times 0.5}{0.4 \times 0.5 + 0.3 \times 0.3} \approx 0.69. \end{aligned}$$

Exercice 2. (4 pts) On transmet un message composé de n symboles binaires 0 ou 1. Lors de la transmission, chaque symbole est perturbé avec la probabilité p et se transforme alors en symbole opposé.

Par précaution, le message est transmis deux fois. Si les deux messages transmis coïncident, l'information est considérée comme correcte.

1. Avec quelle probabilité le $i^{ème}$ symbole du premier message transmis est-il identique au $i^{ème}$ symbole du deuxième message transmis ?
2. Avec quelle probabilité les deux messages transmis sont-ils identiques ?
3. Trouver la probabilité pour que, malgré la coïncidence des deux messages, l'information s'avére erronée. (Application numérique : $n = 100, p = 0.001$).

Solution de l'exercice 2

Soient $M^1 = (s_1^1, s_2^1, \cdots, s_i^1, \cdots, s_n^1)$ et $M^2 = (s_1^2, s_2^2, \cdots, s_i^2, \cdots, s_n^2)$ les messages reçus après première et deuxième transmission.

On définit les événements suivants :
A_i^1 : " Le $ième$ symbole du premier message a été perturbé". Avec $P(A_i^1) = p$.
A_i^2 : " Le $ième$ symbole du second message a été perturbé". Avec $P(A_i^2) = p$.
I : "Les deux messages sont identiques."$\Longleftrightarrow M^1 = M^2$.
C : "Le message est correct."$\Longleftrightarrow \bar{C}$:"Le message est erroné".

1. **(1pt)** On cherche à calculer $P("s_i^1 = s_i^2")$. Or l'événement "$s_i^1 = s_i^2$" veut dire que soit les deux symboles n'ont pas été perturbés tous les deux, soit ils ont été perturbés tous les deux.
   Autrement-dit, l'événement "$s_i^1 = s_i^2$" peut s'écrire $(A_i^1 \cap A_i^2) \cup (\bar{A_i^1} \cap \bar{A_i^2})$.
   D'où $P("s_i^1 = s_i^2") = P(A_i^1 \cap A_i^2) + P(\bar{A_i^1} \cap \bar{A_i^2}) - P((A_i^1 \cap A_i^2) \cap (\bar{A_i^1} \cap \bar{A_i^2}))$.
   Mais $P((A_i^1 \cap A_i^2) \cap (\bar{A_i^1} \cap \bar{A_i^2})) = 0$, donc
   $$\begin{aligned} P("s_i^1 = s_i^2") &= P(A_i^1 \cap A_i^2) + P(\bar{A_i^1} \cap \bar{A_i^2}) \\ &= P(A_i^1)P(A_i^2) + P(\bar{A_i^1})P(A_i^2) \\ &= p^2 + (1-p)^2 \end{aligned}$$
   A.N. : $P("s_i^1 = s_i^2") = 0,998002$.
2. **(1.5 pts)** On cherche à calculer $P(I)$, or l'événement I peut s'écrire
   I : "$s_1^1 = s_1^2$ et $s_2^1 = s_2^2$ et $\cdots s_n^1 = s_n^2$"
   Comme les bits sont perturbés de manière indépendante, on a
   $$\begin{aligned} P(I) &= P("s_1^1 = s_1^2") \times P("s_2^1 = s_2^2") \times \cdots \times P("s_n^1 = s_n^2") \\ &= \prod_{i=1}^{n} P("s_i^1 = s_i^2") \\ &= \left(p^2 + (1-p)^2\right)^n. \end{aligned}$$
   A.N. : $P(I) = (0,998002)^{100} \approx 0,819$.

3. **(1.5 pts)** On veut calculer $P(\bar{C}/I)$. D'après le Théorème de Bayes, on a

$$P(\bar{C}/I) = \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(I)} \tag{3}$$

D'autre part, on peut décomposer l'événement I sur le système complet $\{C, \bar{C}\}$:

$$I = (I \cap C) \cup (I \cap \bar{C}) \Longrightarrow P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap \bar{C}) \Longrightarrow P(I \cap \bar{C}) = P(I) - P(I \cap C)$$

Or, $C \Longrightarrow I$ car un message correct implique que $M^1 = M^2$. Donc $I \cap C = C$,
avec $P(C) = P\left[(\bar{A}_1^1 \cap \bar{A}_2^1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n^1) \bigcap (\bar{A}_1^2 \cap \bar{A}_2^2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n^2)\right] = (1-p)^{2n}$.
En remplaçant dans 3, on obtient

$$P(\bar{C}/I) = 1 - \frac{P(C)}{P(I)} = 1 - \frac{(1-p)^{2n}}{(p^2 + (1-p)^2)^n}$$

A.N. : $P(\bar{C}/I) \approx 0.0001$.

Exercice 3. (5 pts) En supposant que les bénéfices quotidiens d'un magasin admettent la distribution normale de moyenne 1000 et d'écart-type 150, déterminer :

a) la probabilité d'avoir un bénéfice supérieur ou égal à 1250.
b) la probabilité d'avoir un bénéfice compris entre 1050 et 1450.
c) le minimum du bénéfice que le magasin va réaliser à un taux de 15%.

Solution de l'exercice 3

Soit X la V.A qui représente les bénéfices quotidiens du magasin. $X \sim N(1000, 150)$.

1. **(1.5 pts)** On a $P(X > 1250) = P\left(\frac{X-1000}{150} > \frac{1250-1000}{150}\right) = P(Z > 1.66) = 1 - \Pi(1.66) = 0,0485$. où $Z = \frac{X-1000}{150} \sim N(0,1)$.
2. **(1.5 pts)** $P(1050 < X < 1450) = P\left(\frac{1050-1000}{150} < Z < \frac{1450-1000}{150}\right) = \Pi(3) - \Pi(0.33) = \Pi(3) - (1 - \Pi(0.67)) = 0.999 - 1 + 0.7486 = 0,7476$.
3. **(2pts)** On cherche a tel que $P(X > a) = 0.15$. On a

$$P(X > a) = 1 - P(X < a) = 0.15 \Longrightarrow P(X < a) = P\left(Z < \frac{a-1000}{150}\right) = \Pi\left(\frac{a-1000}{150}\right) = 0.85$$

D'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\frac{a-1000}{150} = 1.04$. Par conséquent on a $a = 1000 + 1.04 \times 150 = 1156$.

Exercice 4. (5 pts) Soit un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) tel que $D_X = \{-1, 0, 1\}$ et $D_Y = \{0, 1, 2\}$ dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
-1	a	$2a$	a
0	0	a	a
1	a	0	$3a$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer l'espérance conditionnelle de $Y/X \in \{0, 1\}$.
4. Étudier l'indépendance des variables X et Y.

Solution de l'exercice 4

1. **(1 pt)** On a $\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y} p(x,y) = 10a = 1$. Par conséquent $a = \dfrac{1}{10}$.
2. **(1 pt+1pt)** Les lois marginales de X et Y s'obtiennent par
   - $p(x) = P(X = x) = \sum_{y\in D_Y} p(x,y), \forall x \in D_X$.
   - $p(y) = P(Y = y) = \sum_{x\in D_X} p(x,y), \forall y \in D_Y$.

   On obtient alors :

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{si } x = -1 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \\ \frac{2}{5} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } y = 0 \\ \frac{3}{10} & \text{si } y = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. **(1 pt)** La loi conditionnelle de $Y/X \in \{0,1\}$ s'écrit comme suit :

$$P(Y/X \in \{0,1\}) = \frac{P(Y \cap X \in \{0,1\})}{P(X \in \{0,1\})} = \frac{P(x=0,y) + P(x=1,y)}{P(x=0) + P(x=1)}.$$

   Donc $P(Y/X \in \{0,1\})$ s'écrit

$$\begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } y = 0 \\ \frac{1}{10} & \text{si } y = 1 \\ \frac{2}{5} & \text{si } y = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Par conséquent $E(Y/X \in \{0,1\}) = \sum_{y\in D_Y} yp(y/X \in \{0,1\}) = 0 \times \dfrac{1}{10} + 1 \times \dfrac{1}{10} + 2 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{9}{10}$.
4. **(1 pt)** On peut facilement voir que les variables X et Y ne sont pas indépendantes puisque :

$$P(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{10} \neq P(X = -1) \times P(Y = 0) = \frac{2}{25}.$$