Corrigé-type de l'Examen
SFLP 2021-2022

Exercice 01: (12 pts).

1- La Sémantique Dénotationnelle pour la Commande For:

$C[\![$ for $x:=3$ downto 2 do $y:=x+1$ $]\!]\delta$

$= C[\![x:=3 ; \text{while } x \geq 2 \text{ do } (y:=x+1 ; x:=x-1)]\!]\delta$ 01

2- L'exécution de F avec les règles Opérationnelles:

On a: $F \sim$ for $x:=3$ downto 2 do $y:=x+1$; $y:=y*2$.

donc: $F \sim \underbrace{x:=3}_{I1} ; \underbrace{\text{while } x \geq 2 \text{ do } (y:=x+1 ; x:=x-1)}_{I2} ; \underbrace{y:=y*2}_{I3}$

* l'exécution de I1:

$$\frac{\langle 3, \delta\rangle \to 3}{\langle x:=3, \delta\rangle \to \underbrace{\delta[3/x]}_{\delta'}} \quad 0{,}5$$

* l'exécution de I2:

Itération 01:

$$\frac{\langle x, \delta'\rangle \to 3 \quad \langle 2, \delta'\rangle \to 2}{\langle x \geq 2, \delta'\rangle \to \text{true}} \qquad \frac{\dfrac{\langle x, \delta'\rangle \to 3 \quad \langle 1, \delta'\rangle \to 1}{\langle x+1, \delta'\rangle \to 4}}{\langle y:=x+1, \delta'\rangle \to \underbrace{\delta'[4/y]}_{\delta_1}} \qquad \frac{\dfrac{\langle x, \delta_1\rangle \to 3 \quad \langle 1, \delta_1\rangle \to 1}{\langle x-1, \delta_1\rangle \to 2}}{\langle x:=x-1, \delta_1\rangle \to \delta_1[2/x]}$$

$$\frac{\langle y:=x+1 ; x:=x-1, \delta'\rangle \to \underbrace{\delta'[4/y][2/x]}_{\delta_2} \qquad \langle W, \delta_2\rangle \to \delta_2}{\langle I2, \delta'\rangle \to \delta'[4/y][2/x]} \quad 1{,}5$$

Itération 02: On prend: $\delta(x)=2$ $\delta(y)=4$.

$$\frac{\langle x, \delta\rangle \to 2 \quad \langle 2, \delta\rangle \to 2}{\langle x \geq 2, \delta\rangle \to \text{true}} \qquad \frac{\dfrac{\langle x, \delta\rangle \to 2 \quad \langle 1, \delta\rangle \to 1}{\langle x+1, \delta\rangle \to 3}}{\langle y:=x+1, \delta\rangle \to \underbrace{\delta[3/y]}_{\delta_1}} \qquad \frac{\dfrac{\langle x, \delta_1\rangle \to 2 \quad \langle 1, \delta_1\rangle \to 1}{\langle x-1, \delta_1\rangle \to 1}}{\langle x:=x-1, \delta_1\rangle \to \delta_1[1/x]}$$

$$\frac{\langle y:=x+1 ; x:=x-1, \delta\rangle \to \underbrace{\delta[3/y][1/x]}_{\delta_2} \qquad \langle W, \delta_2\rangle \to \delta_2}{\langle I2, \delta\rangle \to \delta[3/y][1/x]} \quad 1{,}5$$

$\langle I2, \delta\rangle \to \delta[3/y][1/x]$.

Iteration 03 : On peut : $\delta(x) = 1$ et $\delta(y) = 3$

$$\frac{\dfrac{\langle x, \delta\rangle \to 1 \quad \langle 2, \delta\rangle \to 2}{\langle x \geqslant 2, \delta\rangle \to \text{false}}}{\langle I_2, \delta\rangle \to \delta}$$

telque : $\delta(x) = 1 \wedge \delta(y) = 3$ 01

* l'exécution de $I_1 ; I_2 ; I_3$:

$$\frac{\langle I_1, \delta\rangle \to \underbrace{\delta[3/x]}_{\delta_1} \quad \langle I_2, \delta_1\rangle \to \underbrace{\delta_1[3/y][1/x]}_{\delta_2} \quad \dfrac{\langle y, \delta_2\rangle \to 3 \quad \langle 2, \delta_2\rangle \to 2}{\langle y + 2, \delta_2\rangle \to 6}}{\langle y := y + 2, \delta_2\rangle \to \delta_2[6/y]}$$

$$\langle I_1 ; I_2 ; I_3, \delta\rangle \to \delta_2[6/y].$$

telque : $\delta_2(x) = 1 \quad \delta_2(y) = 6$ 1,5

3 - les fonctions sémantiques Pour : while $x > 5$ do $x := x + 1$.

$C_0 \equiv$ diverge 0,5

$C_1 \equiv$ if $x > 5$ then $(x := x + 1 ; C_0)$ else skip 0,5

$C_2 \equiv$ if $x > 5$ then $(x := x + 1 ; C_1)$ else skip. 0,5

- $C[\![C_0]\!]\delta = C[\![\text{diverge}]\!]\delta$ indéfinie $\forall \delta \in \Sigma$. 0,5
- $C[\![C_1]\!]\delta = C[\![\text{if } x > 5 \text{ then } (x := x + 1 ; C_0) \text{ else skip}]\!]\delta$

$$= \begin{cases} C[\![x := x + 1 ; C_0]\!]\delta & \text{si } B[\![x > 5]\!]\delta = \text{true} \\ C[\![\text{skip}]\!]\delta & \text{si } B[\![x > 5]\!]\delta = \text{false} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} C[\![C_0]\!](C[\![x := x + 1]\!]) & \text{si } \delta(x) > 5 \\ \delta & \text{si } \delta(x) \leqslant 5. \end{cases}$$

$$C[\![C_1]\!]\delta = \begin{cases} \text{indéfinie} & \text{si } \delta(x) > 5 \\ \delta & \text{si } \delta(x) \leqslant 5 \end{cases}$$ 01

* $C[\![C_2]\!]\delta = C[\![$ if $x>5$ then $(x:=x+1 ; C_1)$ else Skip $]\!]\delta$

Si $\delta(x) \leq 5$:

$C[\![C_2]\!]\delta = C[\![\text{Skip}]\!]\delta = \delta$ .... (1).

Si $\delta(x) > 5$:

$C[\![C_2]\!]\delta = (C[\![C_1]\!] \circ C[\![x:=x+1]\!])\delta$.

$= C[\![C_1]\!](C[\![x:=x+1]\!]\delta)$

$= C[\![C_1]\!](C[\![x:=\delta(x)+1]\!]\delta)$ 01

$C[\![C_2]\!]\delta = C[\![C_1]\!]\delta'$

On utilise les fonctions Sémantiques de C_1 on trouve :

Si $\delta'(x) \leq 5 \Rightarrow \delta(x)+1 \leq 5$

$\Rightarrow 5 < \delta(x) \leq 4 \rightarrow$ contradiction 0,5

donc : $C[\![w]\!]\delta = \begin{cases} \text{indéfinie si } \delta(x)>5. \\ \delta \quad \text{si } \delta(x) \leq 5 \end{cases}$ 0,5.

Exercice 02 : (08 pts).

1/ L'ensemble des Variables libres :

$FV(\varphi_1) = \{y\}$. 0,5

$FV(\varphi_2) = \{x\}$. 0,5

$FV(\varphi_3) = \{z\}$ 0,5

2/ $\varphi_1[h/x] = \varphi_1$ 0,5

$\varphi_2[h/x] = \forall z (\exists y\ h = y+3 \rightarrow \exists x\ x = 4*z)$. 0,5

$\varphi_3[x/z] = \varphi_3$ 0,5

3/ $\{a = x * 5\}\ x := x * 5\ \{B\}$

$\{B[x*5/x]\} = \{a = x*5\}$.

$\Rightarrow \{B\} = \{a = x\}$ 0,5

* $\{A\}\ x := y\ \{x = y\}$

$\{A\} = \{x = y[y/x]\} = \{y = y\}$

$\Rightarrow \{A\} = \{Vrai\}$ 01

* $\{x \geq 3\}\ x := x * x\ \{B\}$

$\{B[x*x/x]\} = \{x \geq 3\}$

$\Rightarrow \{B\} = \{x \geq \sqrt{3}\}$ 01

* $\{x = b \wedge y = a\}\ z := y;\ y := x;\ x := z\ \{B\}$.

$\{x = b \wedge y = a\}\ z := y\ \{x = b \wedge z = a\}$ 0,5

$\{x = b \wedge z = a\}\ y := x\ \{y = b \wedge z = a\}$ 0,5

$\{y = b \wedge z = a\}\ x := z\ \{y = b \wedge x = a\}$ 0,5

* $\{A\}\ x := x + 2;\ \{A'\}\ x := x + 1\ \{x = 4\}$

$\{x = 4[x+1/x]\} = \{x + 1 = 4\}$

$\Rightarrow \{x = 3\} = \{A'\}$ 0,5

$\{A'[x+2/x]\} = \{x = 3[x+2/x]\} = \{A\}$

$\Rightarrow \{A\} = \{x + 2 = 3\} = \{x = 1\}$ 0,5