Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté des nouvelles technologies de l'information et de la communication
Département d'informatique et technologie d'information

Module: Logique Mathématique
Année universitaire: 2021/2022
Niveau: 2ème année Informatique
Durée : 01 h 30 min

Corrigé_type

EXERCICE 1 : (04 pts)

Répondre par Vrai ou Faux aux assertions suivantes, puis corriger les erreurs :

1. Prof (¬¬¬A∧B→C) =6	Vrai	0 ,25
/		
2. ({φ1,φ2,φ3} compatible) ↔ (φ1∧φ2∧φ3 satisfaite)	Vrai	0 ,25
/		
3. p un prédicat unaire, f une fonction. ∀x (p(x)=f(a) ⟶ p(x)) est une formule de la logique de premier ordre	Faux	0 ,5
L'égalité existe entre deux termes (fonction, constante, variable)		
4. (φ tautologie) ↔ (φ |– ∅)	Faux	0 ,5
(φ tautologie) ↔ (|– φ)		
5. (∀xp(x) ⟶ p(y) v p(x)) [y/x] = ∀x p(y) ⟶ p(y) v p(y)	Faux	0 ,5
(∀xp(x) ⟶ p(y) v p(x)) [y/x] = **∀x p(x) ⟶ p(y) v p(y)**		
6. A v ¬A est synonyme de B v ¬B v A	Vrai	0 ,25
/		
7. C (∀x y z (p(x)v¬p(y))) =3	Faux	0 ,5
C (∀x y z (p(x)v¬p(y))) =5		
8. La formule atomique du premier ordre est un terme.	Faux	0 ,5
La formule atomique du premier ordre est **un prédicat** ou **l'égalité entre deux termes.**		
9. φ1, φ2 ⊢ φ1	Vrai	0 ,25
/		
10. ∀x y z (p(x)v¬p(y)) → p(z) Les variables libres sont : x, y, z	Faux	0 ,5
Le variable libre est : **z**		

EXERCICE 2 : (11 pts)

Soit le raisonnement suivant :

(a) Si le meurtre a eu lieu la nuit et sans témoin, alors Ali est l'assassin.

(b) Si le meurtre a eu lieu sans témoin alors il a eu lieu la nuit.

(c) Le meurtre a eu lieu avec témoin ssi Ali est l'assassin.

(d) Si le meurtre a eu lieu la nuit, alors Ali n'est pas l'assassin.

(e) Ali est-il l'assassin ?

(f) Le meurtre n'a pas eu lieu la nuit ou sans témoin.

Traduction :

- Le meurtre a eu lieu la nuit : وقعت جريمة القتل في الليل
- Le meurtre a eu lieu avec témoin : وقعت جريمة القتل بوجود شاهد
- Ali est l'assassin : علي هو القاتل

1. Formuler les six énoncés en logique propositionnelle.

Le meurtre a eu lieu la nuit : **N**

Le meurtre a eu lieu avec témoin : **T**

Ali est l'assassin : **A**

φ1= (N ∧ ⌉ T) → A **0 ,25**

φ2= ⌉ T → N **0 ,25**

φ3= T ↔ A **0 ,25**

φ4= N → ⌉ A **0 ,25**

φ5 non proposition **0 ,25**

φ6= ⌉ N ∨ ⌉ T **0 ,25**

2. Tracer la table de vérité. **0 ,5** **0 ,5** **0 ,5** **0 ,5** **0 ,5**

N	T	A	⌉N	⌉T	⌉A	N ∧ ⌉ T	φ1	φ2	φ3	φ4	φ6	
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	V1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	V2
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	V3
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	V4
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	V5
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	V6
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	V7
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	V8

3. On sait que toutes les phrases sont vraies.

- Ali est-il l'assassin ?
- Est ce que le meurtre a eu lieu la nuit ?

(Toutes les phrases sont vraies) $\leftrightarrow (\forall v\ [\varphi 1]_v=[\varphi 2]_v=[\varphi 3]_v=[\varphi 4]_v=[\varphi 6]_v=1)$

$\leftrightarrow$ (1 cas)

Cas : $v4 \models \varphi 1 \wedge \varphi 2 \wedge \varphi 3 \wedge \varphi 4 \wedge \varphi 6$ **0 ,5**

v4 (N,T,A) = (0,1,1) ……possible

Conclusion :

v4 (A) = 1 ↔ Ali est l'assassin. **0 ,5**

v4 (N) = 0 ↔ le meurtre n'a pas eu lieu la nuit. **0 ,5**

4. On suppose qu'une seule phrase est fausse, et le meurtre a eu lieu avec témoin.

Est-ce qu'Ali est l'assassin ? Quelle est la phrase fausse? Justifier.

(Une seule phrase est fausse) $\leftrightarrow$ (Trois cas)

Cas1 : $(V1 \models \varphi1 \wedge \varphi3 \wedge \varphi4 \wedge \varphi6) \wedge [\varphi2]_{v1}=0$
$V1(N,T,A) = (0,0,0)$……..impossible **0 ,5**

Cas2 : $(V3 \models \varphi1 \wedge \varphi2 \wedge \varphi4 \wedge \varphi6) \wedge [\varphi3]_{v3}=0$
$V1(N,T,A) = (0,1,0)$……..possible **0 ,5**

Cas3 : $(V5 \models \varphi2 \wedge \varphi3 \wedge \varphi4 \wedge \varphi6) \wedge \neg(V5 \models \varphi1)$
$V1(N,T,A) = (0,1,0)$……..impossible **0 ,5**

Conclusion :

$V1(A) = 0 \leftrightarrow$ Ali n'est pas l'assassin. **0 ,5**

La phrase (c) est la phrase fausse par l'évaluation v3. **0 ,5**

5. En utilisant l'algorithme de résolution, étudier la validité : $(c) \wedge (f) \rightarrow (d)$

$(c) \wedge (f) \rightarrow (d) \leftrightarrow$ **$(T \leftrightarrow A) \wedge (\neg N \vee \neg T) \rightarrow (N \rightarrow \neg A)$**

On met **: $\varphi = (T \leftrightarrow A) \wedge (\neg N \vee \neg T) \rightarrow (N \rightarrow \neg A)$**

Pour étudier la validité de φ il faut étudier la négation de φ :

- Mettre $\neg\varphi$ sous FNC :

$\neg\varphi = \neg((T \leftrightarrow A) \wedge (\neg N \vee \neg T) \rightarrow (N \rightarrow \neg A))$
$\neg\varphi = (T \leftrightarrow A) \wedge (\neg N \vee \neg T) \wedge \neg (N \rightarrow \neg A)$
$\neg\varphi = (T \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow T) \wedge (\neg N \vee \neg T) \wedge N \wedge \neg\neg A$ **01**
$\neg\varphi = (\neg T \vee A) \wedge (\neg A \vee T) \wedge (\neg N \vee \neg T) \wedge N \wedge A$ ……sous FNC

- Extraction des clauses :

$\Sigma = \{ \neg T \vee A,\ \neg A \vee T,\ \neg N \vee \neg T,\ N,\ A \}$ **0,5**

- Résolution :

C1= $\neg A \vee T$ ……...hypothèse

C2= A ……hyp

C3= T……..res(C1,C2)

C4= $\neg N \vee \neg T$ ……hyp

C5 = $\neg N$ ……..res(C3,C4) **01**

C6 = N ……hyp

C7= $\varnothing$ ……res(C5,C6)

Conclusion :

$\neg\varphi \vdash \varnothing \leftrightarrow \neg\varphi$ est non satisfaite

$\leftrightarrow \varphi$ est valide. **0,5**

EXERCICE 3 : (05 pts)

I. Soit la formule : $\varphi = A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (D \rightarrow A)))$

1. En utilisant la méthode de Quine, tracer la table réduite ?

$A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (D \rightarrow A)))$

A

0 — 1

$0 \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (D \rightarrow 0)))$

$0 \rightarrow \forall$

$\boxed{1}$ **0,5**

$1 \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (D \rightarrow 1)))$

$1 \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (\forall \rightarrow 1)))$

$1 \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow 1))$

$1 \rightarrow (B \rightarrow 1)$

$1 \rightarrow 1$

0,5 $\boxed{1}$

A	B	C	D	φ
0	∀	∀	∀	**1**
1	∀	∀	∀	**1**

0,5

2. Déduire le FNC.

$(\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee C)$ …….. **0,5**

3. Donner la notation polonaise de φ.

$\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D\ A$ **0,5**

II. Soit le langage du premier ordre formé de 3 prédicats unaires :

P(x) : x est un nombre pair, **I(x)** : x est un nombre impair, **PR(x)** : x est un nombre premier
Une constante : **2**

1. Formuler en logique des prédicats les énoncés suivants :
   - Le nombre 2 est pair et premier.

     $P(2) \wedge PR(2)$ **0,5**

   - Tous les nombres pairs sauf 2 ne sont pas premiers.

     $\forall x\ (P(x) \wedge \neg (x=2) \rightarrow \neg PR(x))$ **0,75**

   - Certain nombres premiers sont impairs.

     $\exists x\ (PR(x) \wedge I(x))$ **0,5**

2. Traduire en langage naturel la formule suivante :
   - $\exists x\ (PR(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x\ (PR(x) \wedge I(x))$

   Certain nombres premiers sont pairs et d'autres sont impairs. **0,75**