Université Kasdi Merbah Ouargla
FNTIC
Département de l'ITI

Année universitaire : 2021-2022.
Niveau : 2 ème année Licence.
Module : Théorie des graphes.

Examen

Nom :	**Num d'inscription :**
Prénom :	**Section :** **Groupe :**

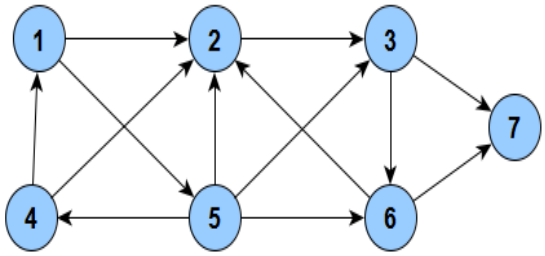
Exercice 1 *(7 points)*

Soit le graphe orienté **G** présenté par la figure ci dessous :

1) Donnez la matrice d'adjacence correspondante au graphe G.

(1 Pts)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	0	0	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0



G

2) Donner la représentation machine (tables des successeurs) correspondante de **G**.

(1 Pts)

	1	2	3	4	5	6	7
PS	1	3	4	6	8	11	13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
LS	2	5	3	6	7	1	2	2	4	6	2	7	0

3) Est ces qu'il existe une relation de forte connexité entre le sommet 1 et le sommet 6? Justifiez votre réponse.

(1 Pts)

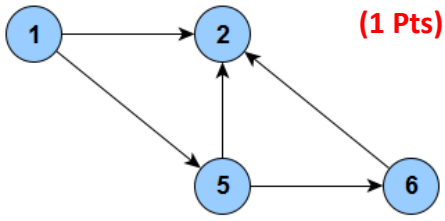
Non il n'existe pas une relation de forte connexité entre le sommet 1 et le sommet 6 car on remarque que dans le graphe **G** il existe un chemin du sommet 1 vers le sommet 6 C=(1, 2,3 ,6) mais il n'existe pas un chemin du sommet 6 vers le sommet 1 et pour sire qu'il ya une relation de forte connexité entre deux sommet **x** et **y** on doit avoir un chemin de vers y et un chemin de y vers x.

4) Déterminer le sous-graphe induit par les sommets {1, 2 , 5, 6}.

H=(W, F) avec

W={1, 2, 5, 6} et

F={12, 15, 52, 56, 62}



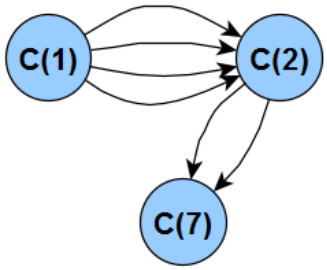
(1 Pts)

5) En appliquant l'algorithme de décomposition, décomposer le graphe **G** suivant en composantes fortement connexes. Donner le graphe réduit. **(2 Pts)**

X←{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
v ← 1 ; D(1) ←∅ ; A(1) ←∅ ;
D(1) ←{1, 2 ,5, 3, 4, 6, 7} ;
A(1) ←{1, 4 ,5 } ;
C(1) ← D(1) ∩ A(1) ;
C(1) ={1, 4 ,5 } ;
X←X / C(1) ;
X={2, 3, 6, 7} ;
v ← 2 ; D(2) ←∅ ; A(2) ←∅ ;
D(2) ←{2, 3, 6, 7} ;
A(2) ←{2, 6, 3} ;

C(2) ← D(2) ∩ A(2) ;
C(2) ={2, 3, 6} ;
X←X / C(2) ;
X={ 7} ;
v ← 7 ; D(7) ←∅ ; A(7) ←∅ ;
D(7) ←{7} ;
A(7) ←{7} ;
C(7) ← D(7) ∩ A(7) ;
C(7) ={7} ;
X←X / C(7) ;
X=∅; ⇒ fin de l'algorithme.

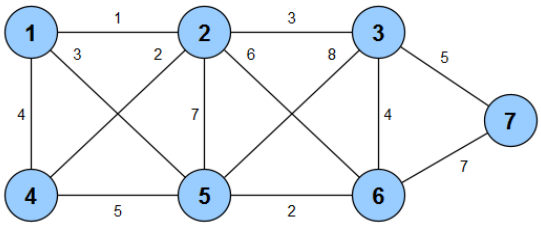
Le graphe réduit est :



(1 Pts)

Exercice 2 *(7 points)*

On considère le graphe pondéré suivant avec les poids sur les arêtes:

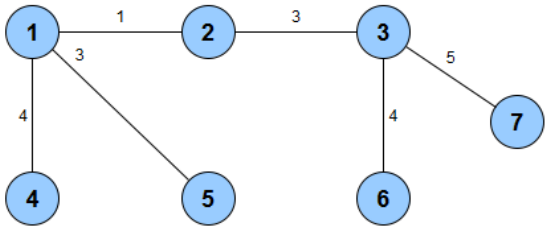


1) Donnez la connectivité et l'arête connectivité du graphe G.

- On a l'ensemble d'articulation S={2, 5} avec |S|= 2
  ⇒la connectivité du graphe G est K(G)=2 alors le graphe 2-Connexe. **(1 Pts)**
- On a la coupe C={37, 67} avec |C|= 2
  ⇒L'arrête connectivité du graphe G est λ(G)=2 alors le graphe 2- arrête-Connexe. **(1 Pts)**

2) Donner un arbre couvrant de poids **20**.

Soit l'arbre T=(V, X) avec V={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} et X={15, 14, 12, 23, 36, 37}



(1 Pts)

3) Donnez s'il existe un cycle Hamiltonien.

Il existe un cycle Hamiltonien tel que C=(1, 5, 3, 7, 6, 2, 4, 1) **(1 Pts)**

4) Donner l'arbre couvrant de poids minimum en appliquant au choix l'un des algorithmes de recherche d'un arbre couvrant de poids minimum (**Kruskal** ou **Prim**).

Algorithme de Prim

(2 Pts)

T=(S,X)

S←{1} ; P(T)←0 ; X←∅ ;

S={1} , uv=12 ⇒ X←{12}, P(T)← P(T)+P(12)=0+1=1, S←S∪{2} ;

S={1, 2} , uv=24 ⇒ X←X∪{24}, P(T)← P(T)+P(24)=1+2=3, S←S∪{4} ;

S={1, 2, 4} , uv=15 ⇒ X←X∪{15}, P(T)← P(T)+P(15)=3+3=6, S←S∪{5} ;

S={1, 2, 4, 5} , uv=56 ⇒ X←X∪{56}, P(T)←P(T)+P(56)=6+2=8, S←S∪{6} ;

S={1, 2, 4, 5, 6} ,uv=23 ⇒ X←X∪{23}, P(T)←P(T)+P(23)=8+3=11, S←S∪{3} ;

S={1, 2, 4, 5, 6, 3} ,uv=37 ⇒ X←X∪{37}, P(T)←P(T)+P(37)=11+5=16, S←S∪{7} ;

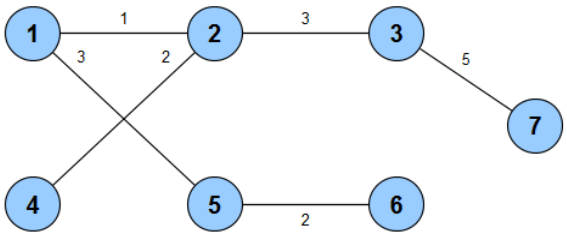
S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} = V ⇒ fin de l'algorithme,

X={12, 24, 15, 56, 23, 37},

l'arbre couvrant de poids minimum est T=(S, X) et

P(T)=16.

(1 Pts)



Algorithme de Kruskal

(0.5 Pts)

arêtes	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
(x,y)	(1,2)	(2,4)	(5,6)	(1,5)	(2,3)	(1,4)	(3,6)	(4,5)	(3,7)	(2,6)	(2,5)	(6,7)	(3,5)
$P(e_i)$	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	7	7	8

T=(V,X)

i←1 ; P(T)←0 ; X←∅ ; **(1.5 Pts)**

i=1:(V, X∪{e1}) est acyclique alors X←X∪{e1}; P(T)←P(T)+1=1 ;

i=2:(V, X∪{e2}) est acyclique alors X←X∪{e2};P(T)←1+2=3;

i=3 :(V, X∪{e3}) est acyclique alors X ← X ∪{e3}; P(T)←3+2=5;

i=4: (V, X∪{e4}) est acyclique alors X ← X ∪{e4}; P(T)←5+3=8;

i=5: (V, X∪{e5}) est acyclique alors X ← X ∪{e5}; P(T)←8+3=11;

i=6:(V, X∪{e6}) contient un cycle;

i=7:(V, X∪{e7}) contient un cycle;

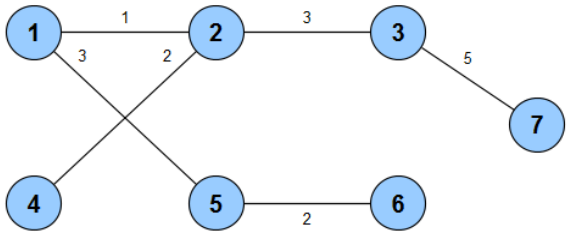
i=8:(V, X∪{e8}) contient un cycle;

i=9: (V, X∪{e9}) est acyclique alors X ← X ∪{e9}; P(T)←11+5=16;

X={ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_9$ } ⇒ |X|=6 =|V|-1 ⇒ fin de l'algorithme,

l'arbre couvrant de poids minimum est **T=(V,X)** avec **P(T)=** 16.

(1 Pts)



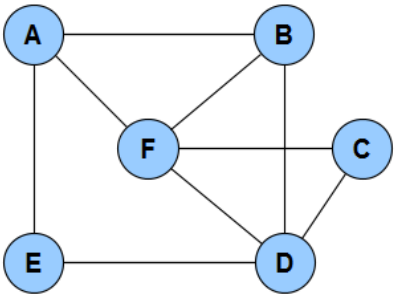
<u>Exercice 3</u> *(6 points)*

Six étudiants désignés par A, B, C, D, E et F se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui tel qu'un étudiant peut rencontrer au hasard les autres étudiants. Le tableau suivant précise qui a rencontré qui :

Etudiant	A	B	C	D	E	F
a rencontré	B, E, F	A, D, F	D, F	B, C, F, E	A, D	A, B, C, D

1) Représenter au moyen d'un graphe cette situation.

G=(V, E) avec V={A, B, C, D, E, F} les étudiants E={**xy**\ tel que l'étudiant **x** a rencontré l'étudiant **y**} **(1 Pts)**



(1 Pts)

G

2) En utilisant le graphe obtenu, donnez le nombre de chaises nécessaire (minimum) que la bibliothèque doit posséder ?

Le nombre de chaises nécessaire (minimum) que la bibliothèque doit posséder est 3 chaises. **(1 Pts)**

3) Donnez la solution en termes de concepts liés à la théorie des graphes.

La solution consiste à faire la coloration des sommets du graphe tel que trouver le nombre de chaises nécessaire revient à trouver le nombre chromatique du graphe tel qu'on met le graphe en stabilité et chaque ensemble représente les sommets deux a deux non adjacents (le étudiants qui peuvent utiliser la même chaise car ils ne peuvent pas être présents dans la bibliothèque en même temps) on a l'ensemble de stabilité suivant:

S1 = {E, B, C}

S2 = {A, D}

S3 = {F}

(1.5 Pts)

$\Rightarrow$ Le nombre chromatique est $\chi(G)=3$.

4) Quel est le nombre maximum d'étudiants présents au même temps dans la bibliothèque ? Exprimer en langage de théorie des graphes la solution.

Le nombre maximum d'étudiant présent au même temps dans la bibliothèque est **3**. **(0.5 Pts)**

Tel que trouver le nombre maximum d'étudiant présent au même temps dans la bibliothèque revient à trouver une clique maximum (un ensemble maximal de sommets deux a deux adjacents) et dans le graphe **G** on a une clique maximum C= {A, B, F} avec |C|=3.

(1 Pts)