

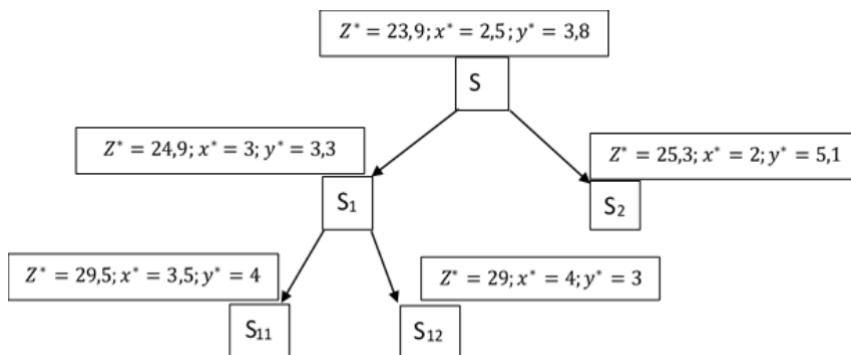
EXAM (1H30MN)

Exercice 1. (7 pts). A construction company recruits 5 workers and wants to split them between its 3 sites in order to minimize the completion time of the construction work. The company must send at least one worker to each site and according to the number of workers allocated, we have estimated the number of weeks needed to finish the work :

| Number of workers | Site 1 | Site 2 | Site 3 |
|-------------------|----------|----------|----------|
| 1 | 35 weeks | 25 weeks | 30 weeks |
| 2 | 28 weeks | 20 weeks | 25 weeks |
| 3 | 20 weeks | 15 weeks | 18 weeks |

- Denote by x_i , the number of workers assigned to the construction site $i, i = 1..3$ and by $T_i(x_i)$ the construction completion time of the site i after assignment of x_i workers. Formulate the worker allocation problem that minimizes the total time required for completing the construction.
- One wants to solve this problem by dynamic programming. Describe the formulation of sub-problems $P_k(\alpha)$, the interval of values taken by α as well as the recurrence relation of $Z_k(\alpha)$.
- Determine then the best allocation of workers to the three sites.

Exercice 2. (7 pts). The following diagram illustrates the solution of an integer linear program (P) defined on two variables x, y by the Branch and Bound method.



- Is (P) a minimization or a maximization problem ? justify your answer.
- According to the diagram given above, determine the corresponding constraint for each sub-problem.
- Are there any nodes to be pruned ? which ones ? justify your answer.
- Have we finished solving (P) ? If not, which subset should be separated and according to which criterion ?

Exercice 3. (6 pts). One wants to solve by dynamic programming, an instance defined on n cities of the traveling salesman problem (TSP).

- What is the number of steps (sub-problems) required to complete the resolution of TSP.
- Determine with justification the number of states to consider for a step corresponding to $|S| = l, l \neq n - 1$, where S denotes the subset of intermediate cities.
- Deduce then the asymptotic complexity of the dynamic programming algorithm for TSP.

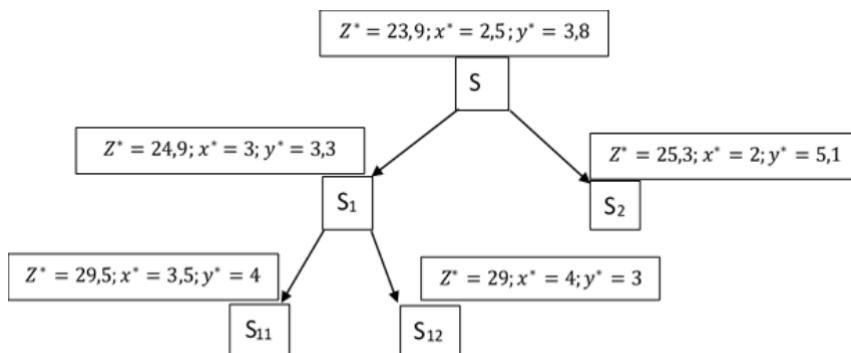
EXAMEN SEMESTRIEL (1H30MN)

Exercice 1. (7 pts). Une entreprise de construction recrute 5 ouvriers et désire les répartir sur ses 3 chantiers afin de minimiser le temps d'achèvement des travaux de construction. Elle doit envoyer à chaque chantier au moins un ouvrier et selon le nombre d'ouvriers alloués, nous avons estimé le nombre de semaines nécessaires pour finir les travaux :

| Nombre d'ouvriers | Chantier 1 | Chantier 2 | Chantier 3 |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 35 semaines | 25 semaines | 30 semaines |
| 2 | 28 semaines | 20 semaines | 25 semaines |
| 3 | 20 semaines | 15 semaines | 18 semaines |

1. On dénote par x_i , le nombre d'ouvriers affectés au chantier i , $i = 1..3$ et par $T_i(x_i)$ le temps de terminaison des travaux de construction du chantier i après affectation de x_i ouvriers. Formuler le problème de répartition des ouvriers qui minimise le temps total requis pour l'achèvement des travaux de construction.
2. On veut résoudre ce problème par programmation dynamique. Expliciter la formulation des sous problèmes $P_k(\alpha)$, l'intervalle des valeurs prises par α ainsi que la relation de récurrence de $Z_k(\alpha)$.
3. Déterminer alors la meilleure affectation des ouvriers.

Exercice 2. (7 pts). Le schéma ci-joint illustre la résolution d'un programme linéaire (P) en nombres entiers défini sur deux variables x, y par la méthode séparation et évaluation.



1. (P) est-il un problème de minimisation ou de maximisation ? justifier.
2. Selon le schéma donné ci-dessus, déterminer la contrainte correspondante à chaque sous problème.
3. Existe t-il des nœuds à stériliser ? les quelles ? justifier.
4. La résolution de (P) est-elle terminée ? sinon, quel sous-ensemble faudrait-il séparer et selon quel critère de séparation ?

Exercice 3. (6 pts). On se propose de résoudre une instance définie sur n villes, du problème de voyageur de commerce (TSP) par programmation dynamique.

1. Déterminer le nombre d'étapes nécessaires (sous-problèmes) pour la résolution de TSP.
2. Déterminer avec justification le nombre d'états à considérer pour l'étape correspondant à $|S| = l$, $l \neq n - 1$, où S désigne l'ensemble de villes intermédiaires.
3. En déduire alors la complexité asymptotique (l'ordre de grandeur) de l'algorithme de programmation dynamique pour TSP.