Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté NTIC - Département d'informatique & TI

3eme année LMD
Module : Programmation Linéaire
Durée : 1h 30 mn
Date : 16/01/2022
Enseignante: N.Marref

Corrigé du Contrôle

Exercice 1 (6 pts)

1/ Variables de décision :

L'entreprise fabrique 2 types de ceintures : type A et type B ,

le problème s'agit de déterminer le nombre de ceintures que l'entreprise doit fabriquer pour chaque type , donc

nous avons besoin de deux variables de décision :

x_1 : Nombre de ceintures du type A

x_2 : Nombre de ceintures du type B

0,75 pt

2/ Fonction objectif :

Le but c'est de maximiser le bénéfice total des 2 types de ceintures ,

le bénéfice unitaire pour le type A est de : 500 DA

le bénéfice unitaire pour le type B est de : 350 DA

donc la fonction objectif est de :

$$\textbf{Max } Z = 500x_1 + 350x_2$$

0,75 pt

2/ Contraintes :

1- Contrainte de la ressource **Cuir** :

L'approvisionnement en cuir est suffisant pour **800** ceintures par jour(type A ou B)

C'est-à-dire avec la quantité disponible du cuir , on ne peut pas fabriquer plus de 800 ceintures , donc la contrainte est la suivante :

$$x_1 + x_2 \leq 800$$

1 pt

2- Contraintes de la ressource **Boucles** :

On dispose de **400** boucles de type A et de **700** boucles de type B chaque jour.

Nous avons 400 boucles pour le type A , donc on ne peut pas fabriquer plus de 400 ceintures du type A

$$x_1 \leq 400$$

0.75 pt

Nous avons 700 boucles pour le type B , donc on ne peut pas fabriquer plus de 700 ceintures du type B

$$x_2 \leq 700$$

0.75 pt

3- Contrainte de la ressource **temps de fabrication** :

Le temps de fabrication de A est **2 fois** plus élevé que le temps de fabrication de B. Si toutes les ceintures étaient de type B , l'entreprise pourrait en fabriquer **1000** par jour.

Le temps de fabrication d'une ceinture de type A est le double pour une ceinture de type B
Exemple :
Si on fabrique 1 ceinture de type A , on peut fabriquer 2 ceintures de type B
De même le temps réservé pour la fabrication de 10 ceintures de A , on peut fabriquer pour le même temps 20 ceintures de type B
L'entreprise , si elle fabrique uniquement des ceintures de type B , elle ne peut pas dépasser 1000 ceintures

C'est-à-dire si on fabrique $\boldsymbol{x_1}$ ceintures de type A , c'est comme si on fabrique $\boldsymbol{2x_1}$ ceintures de type B

Donc la contrainte est la suivante :

$$\boldsymbol{2x_1 + x_2 \leq 1000}$$

1 .5 pt

4- Contrainte de positivité

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

0.5 pt

Donc le programme linéaire est le suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Max } Z = 500x_1 + 350x_2 \\ &\quad x_1 + x_2 \leq 800 \\ &\quad x_1 \leq 400 \\ &\quad x_2 \leq 700 \\ &\quad 2x_1 + x_2 \leq 1000 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

Exercice 2 (7 pts)

(méthode du tableau)

Forme standard

Max Z = $2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + e_1 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + e_2 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

0.5

Tableau 1

C_j		2	1	0	0	0		
	VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b	θ
0	e_1	1	-1	1	0	0	3	3
0	e_2	1	2	0	1	0	6	6
0	e_3	-1	2	0	0	1	2	/
Z_j		0	0	0	0	0	Z=0	
Cj-Zj		2	1	0	0	0		

1 pt

La variable d'entrée x_1 , variable de sortie e_1 , pivot 1

Tableau 2

C_j		2	1	0	0	0		
	VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b	θ
2	x_1	1	-1	1	0	0	3	/
0	e_2	0	3	-1	1	0	3	1
0	e_3	0	1	1	0	1	5	5
Z_j		2	- 2	2	0	0	Z=6	
Cj-Zj		0	3	-2	0	0		

1.5 pt

La variable d'entrée x_2 , variable de sortie e_2 pivot 3

Tableau 3

C_j		2	1	0	0	0	
	VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
2	x_1	1	0	2/3	1/3	0	4
1	x_2	0	1	-1/3	1/3	0	1
0	e_3	0	0	4/3	-1/3	1	4
Z_j		2	1	1	1	0	Z=9
Cj-Zj		0	0	-1	-1	0	

2 pts

Arrêt de l'algorithme : tous les coefficients Cj-Zj sont négatifs ou nuls

1/ La solution optimale = $(x_1^*, x_2^*) = (4\,,1)$ 0.75

2/ les valeurs des variables d'écarts sont :

e_1 =0 , e_2 =0 (car la dernière itération VHB={ e_1, e_2} 0.5

$e_3 = 4$ (voir tableau)

Interprétation

- e_1 =0 $\Longrightarrow$ la contrainte est saturée (consommation totale de la ressource liée a cette contrainte)

$x_1 - x_2 + e_1 = 3$ (4 - 1 =3) 0.25

- e_2 =0 $\Longrightarrow$ la contrainte est saturée (consommation totale de la ressource liée a cette contrainte)
  $x_1 + 2x_2 + e_2 = 6$ (4 +2 = 6) 0.25

- e_3 = 4 $\Longrightarrow$ la contrainte n'est pas saturée .
  $-x_1 + 2x_2 + e_3 = 2$ (-4 +2+4 = 2) 0.25

Exercice 2(méthode algébrique)

Forme standard

Max Z = $2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + e_1 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + e_2 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

0.5 pt

- Base initiale VB={e_1, e_2, e_3} VHB = { x_1, x_2 } $x_1 = 0, x_2$=0

1er itération

Exprimons les variables de base et la fonction objectif en fonction des variables hors base

On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} e_1 &= 3 - x_1 + x_2 \\ e_2 &= 6 - x_1 - 2x_2 \\ e_3 &= 2 + x_1 - 2x_2 \end{aligned}} \quad (1)$$

Solution de base réalisable de départ = (0 ,0 ,3, 6, 2) { $x_1 = 0, x_2 = 0, e_1 = 3, e_2 = 6, e_3 = 2$}

Z =0 ;

Z = $2x_1 + x_2$

Z peut augmenter si on fait entrer $\boldsymbol{x_1}$ dans la base

En gardant $x_2 = 0$ et en remplaçant sa valeur dans (1) et en utilisant la non négativité des variables , on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} e_1 &= 3 - x_1 \geq 0 & x_1 &\leq 3 \\ e_2 &= 6 - x_1 \geq 0 & x_1 &\leq 6 \\ e_3 &= 2 + x_1 \geq 0 & &\textit{toujours verifiee} \end{aligned}}$$

1pt

- On prend le minimum donc c'est la variable $\boldsymbol{e_1}$ qui sort

- nouvelle base VB = { x_1, e_2, e_3 } et VHB ={ e_1, x_2}

2eme itération

Exprimons les variables de base et la fonction objectif en fonction des variables hors base

On obtient après simplification des calculs

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - e_1 + x_2 \\ e_2 &= 3 + e_1 - 3x_2 \\ e_3 &= 5 - e_1 - x_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Solution de base réalisable = (3 ,0 ,0 ,3 , 5) $\{ x_1 = 3, x_2 = 0, e_1 = 0, e_2 = 3, e_3 = 5\}$

Z = $2(3 - e_1 + x_2) + x_2$

Z = $\boldsymbol{6 - 2e_1 + 3x_2}$ Z =6 car $(e_1 = 0 , x_2 = 0)$

- Z peut augmenter si on fait entrer $\boldsymbol{x_2}$ dans la base

En gardant $e_1 = 0$ et en remplaçant sa valeur dans (2) et en utilisant la non négativité des variables , on obtient

1.5pt

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + x_2 \geq 0 && tjs\ positif \\ e_2 &= 3 - 3x_2 \geq 0 && x_2 \leq 1 \\ e_3 &= 5 - x_2 \geq 0 && x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

- On prend le minimum donc c'est la variable $\boldsymbol{e_2}$ qui sort

- nouvelle base VB = { x_1, x_2, e_3 } et VHB ={ e_1, e_2}

3eme itération

Exprimons les variables de base et la fonction objectif en fonction des variables hors base

On obtient après simplification des calculs

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 \\ e_3 &= 4 - \frac{4}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

2 pts

Solution de base réalisable = (4 ,1 ,0 , 0, 4) $\{ x_1 = 4, x_2 = 1, e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 4\}$

Z = $\boldsymbol{6 - 2e_1 + 3x_2}$

Z = $\mathbf{6 - 2e_1 + 3(1 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2)}$

Z = $\mathbf{9 - e_1 - e_2}$ **Z=9** car ($e_1 = 0$, $e_2 = 0$)

- la solution optimale est atteinte car les coefficients des VHB (e_1 et e_2)dans la fonction objectif sont négatifs .

Solution optimale $(x_1^*, x_2^*) = (4\,,1)$ 0.75 pt

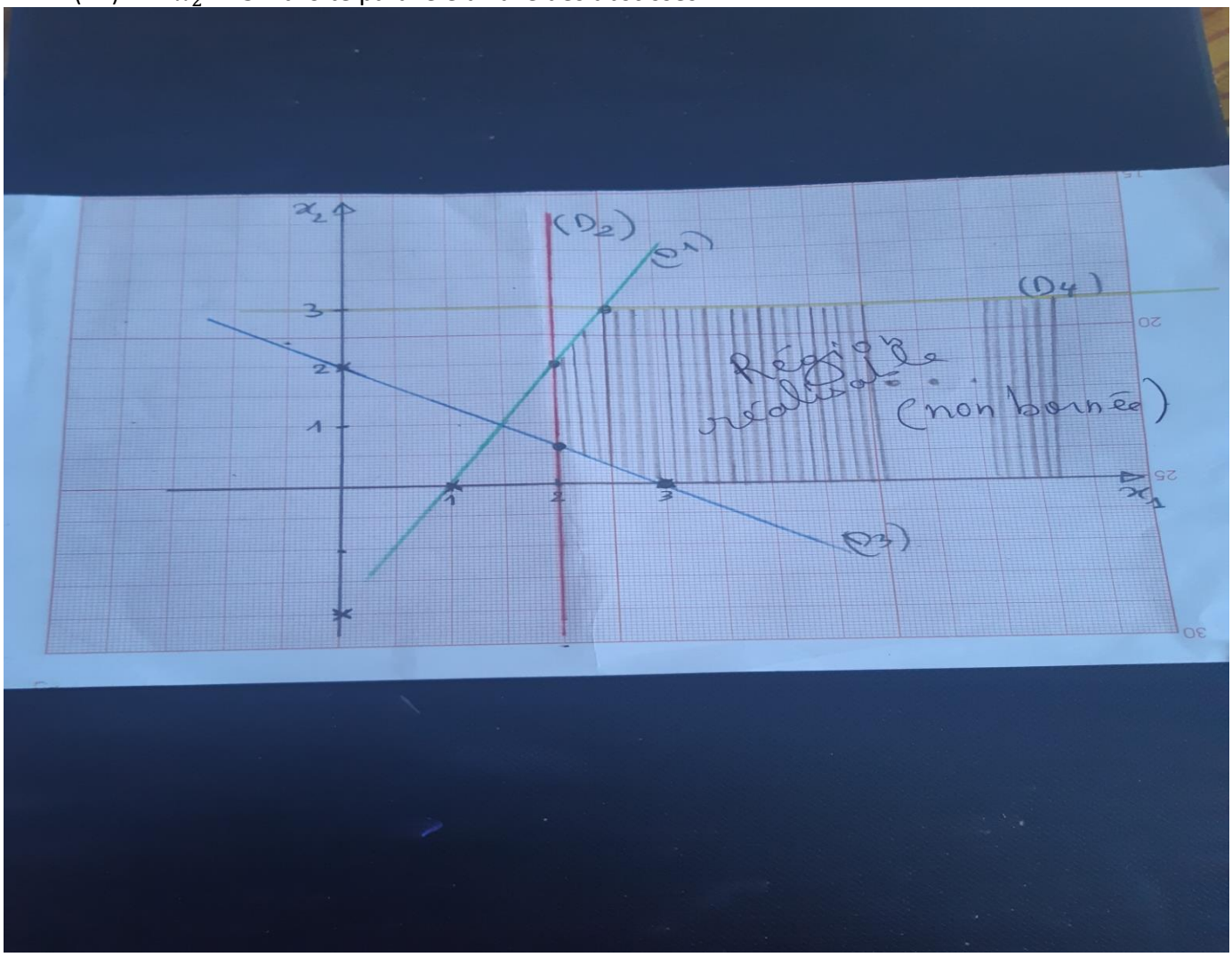
Vérification : Z = $2x_1 + x_2$ Z = $2 * 4 + 1 = 9$

2/ même chose (voir solution (méthode des tableaux)) 0.5 +0.75 pts

Exercice 3 (7pts)

Solution

1/ (D1) : $2x_1 - x_2 = 2$ on choisit 2 points pour tracer la droite (0 , -2) et (1 , 0)
(D2) : $x_1 = 2$ droite parallèle à l'axe des ordonnées
(D3) : $2x_1 + 3x_2 = 6$ on choisit 2 points pour tracer la droite (0 , 2) et (3 , 0)
(D4) : $x_2 = 3$ droite parallèle à l'axe des abscisses



Solution : On voit sur le graphique que la **région réalisable n'est pas bornée** , et du moment qu'il s'agit d'un problème de maximisation , le programme linéaire a une **infinité de solution**s

Bareme : (D1) 0.5 pt , (D2) 0.5 pt , (D3) 0.5 pt , (D4) 0.5 pt

Région réalisable : 2 pt , solution : 1 pt

2/ Min Z = $x_1 + x_2$

La région réalisable n'est pas bornée , mais du moment que c'est un problème de minimisation , on peut trouver une solution optimale (unique ou multiple)

On peut appliquer l'une des deux méthodes :

- Méthode des recensements des sommets

A(2.5 , 3) (D1) ∩ (D4) Z = 2.5 + 3 = 5.5
B(2 , 2) (D1) ∩ (D2) Z = 2 + 2 = 4
Le point C (D3) ∩ (D2) , on peut résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

on remplace $x_1 = 2$ dans la 2eme equation

$4+3x_2 = 6$, donc $x_2 = \frac{2}{3}$

C (2 , 2/3) Z = 2 + 2/3 = 8/3 =2.66

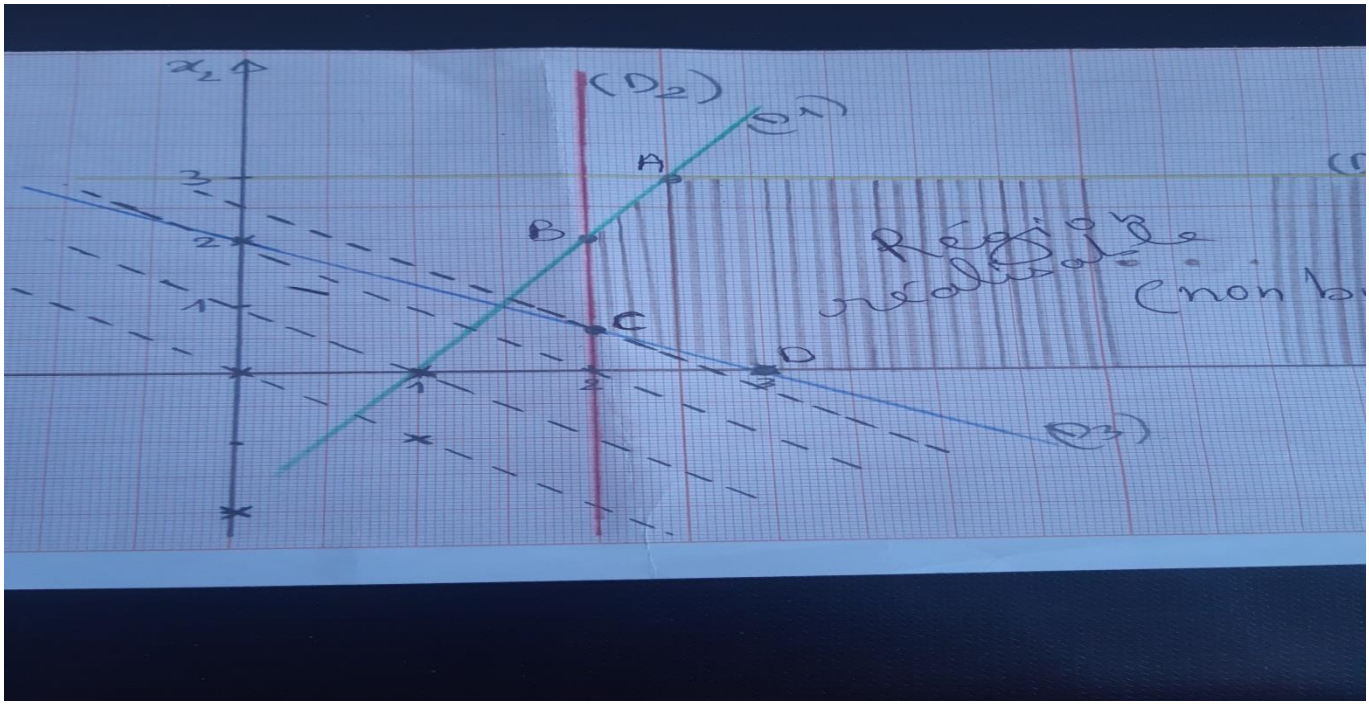
D(3 , 0) Z = 3 + 0 = 3

la solution optimale , sera la plus petite valeur de Z ,

donc le point C (2 , 2/3) est la solution optimale (Z=8/3 = 2.66)

2 pts

- Méthode des droites parallèles :

Z = $x_1 + x_2$

On trace la droite de la fonction objectif , on choisit 2 points (Z=0) (0,0) et (1 , -1)
On va translater cette droite vers le début de la région réalisable , et on voit sur la figure ci-dessous
Que la droite touche en premier le point **C** , on va s'arrêter ici (car on cherche le minimum)