Université Kasdi Merbah Ouargla Faculté des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication –FNTIC– L3 SI, département d'informatique, 2023/2024	Nom : Prénom : Groupe : Note/20

Examen Programmation linéaire (PL)

Exercice 1 : (6 pts)

La direction d'une usine de meuble a constaté qu'il y a des **temps morts** dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, **M1** et **M2**. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de **sciage**, **d'assemblages** et de **sablage** ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. **Les profits** que la compagnie peut réaliser pour chacun de ses modèles sont de **300 Da** pour **M1** et **200 Da** pour **M2**.

	M1	**M2**	**Temps libre**
Sciage	1h	2h	20h
Assemblages	2h	1h	22h
Sablage	1h	1h	12h

1. Donner le programme de la direction permettant de déterminer combien de bureaux de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit ? (Modélisation du PL)
2. Résoudre graphiquement le PL correspondant en utilisant la méthode de recensement des sommets et déterminer le profit optimal ?

✓ Solution :

1. Modélisation du PL correspondant :
   - Variables de décision :

     x : Quantité du modèle M1

     y : Quantité du modèle M2
   - Fonction objectif :

     Max (z) = 300 x + 200 y
   - Contraintes :

     C_1 ➔ Sciage : x+ 2y <=20

     C_2 ➔ Assemblage : 2x+ y <=22

     C_3 ➔ Sablage : x+ y <=12

     C_4 ➔ x>=0, y>=0

2. Résolution graphique :
   - Tracer les droites relatives aux contraintes et déterminer la région réalisable (utiliser le papier millimétrique)

     D_1 : $y = -\frac{1}{2}x + 10$ → $P_1 (0 ,10)$; $P_2 (20 ,0)$

     D_2 : $y = -2x + 22$ → $P_1 (0 ,22)$; $P_2 (11 ,0)$

     D_3 : $y = -x + 12$ → $P_1 (0 ,12)$; $P_2 (12 ,0)$

   - Déterminer le profit optimal :

     $S_1 (0, 10)$ $Z_1 = 2000$

     $S_2 (4, 8)$ $Z_2 = 2800$

     $S_3 (10, 2)$ $Z_3 = 3400$

     $S_4 (11, 0)$ $Z_4 = 3300$

- **Exercice 2 : (6 pts)**

Soit le programme linéaire suivant :

$$\textbf{PL} \begin{cases} \textbf{Min } (z) = 10x + 12y \\ x + y >= 20 \\ y >= \frac{1}{3} x \\ 10 <= x <= 25 \\ y <=15 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

1. Adopter la méthode des droites parallèles pour résoudre graphiquement ce programme linéaire et trouver la solution optimale qui minimise le coût ?

✓ **Solution**

   - Tracer les droites relatives aux contraintes et déterminer la région réalisable (utiliser le papier millimétrique)

     D_1 : $y = -x + 20$ → $P_1 (0 ,20)$; $P_2 (12 ,8)$

     D_2 : $y = \frac{1}{3}x$ → $P_1 (0 ,0)$; $P_2 (6 ,2)$

     D_3 : $x = 10$

     D_4 : $x = 25$

     D_5 : $y = 15$

   - Tracer la droite parallèle Δ_0 et chercher la solution optimale (utiliser le papier millimétrique)

     Δ_0 : $10x + 12y = 0$, $y = -\frac{10}{12}x$ → $P_1 (0 ,0)$; $P_2 (12 ,-10)$

   La solution optimale : S (15 ,5) → Z= 210

- **Exercice 3 : (8 pts)**

On considère le programme linéaire suivant (forme canonique) :

$$\textbf{PL}\begin{cases}\textbf{Max}\ (z) = 40x + 30y \\ x + y <= 5 \\ -2x + 3y >= 12 \\ x, y \geq 0\end{cases}$$

1. Mettre le programme sous la forme standard ?
2. Déterminer la première solution réalisable de base (de Départ), en précisant les variables de base et hors base, puis tracer le tableau simplexe initial ?
3. Changer la base et appliquer les règles de pivotage jusqu'à ce que la solution optimale soit atteinte, et donner la solution réalisable de chaque itération ainsi que la valeur de la fonction objective ?

✓ **Solution :**

1. Forme standard du PL :

$$\textbf{PL}\begin{cases}\textbf{Max}\ (z) = 40x + 30y + 0e_1 + 0e_2 - Mt \\ x + y + e_1 = 5 \\ -2x + 3y - e_2 + t = 12 \\ x, y, e_1, e_2, t \geq 0\end{cases}$$

2. Tableau du simplexe initial :

   - Variables de base : e_1, t
   - Variables hors base : x, y, e_2
   - La solution de base de départ : B_1 (0, 0, 5, 0, 12)

Max	Ci		40	30	0	0	-M
C_B	**B**	**b**	x	y	e_1	e_2	t
0	e_1	5	1	1	1	0	0
-M	t	12	-2	3	0	-1	1
	Z_i	-12M	2M	-3M	0	M	-M
	C_i-Z_i		40-2M	30+3M	0	-M	0

3. Appliquer l'algorithme du simplexe et trouver la solution optimale :

Max	Ci		40	30	0	0	-M
C_B	**B**	**b**	x	y	e_1	e_2	t
0	e_1	1	5/3	0	1	1/3	0
30	y	4	-2/3	1	0	-1/3	1
	Z_i	120	-20	30	0	-10	-M
	C_i-Z_i		60	0	0	10	0

   - La solution réalisable : B_2 (0, 4, 1, 0)
   - Le profit actuel : 120

Max	Ci		40	30	0	0	-M
C_B	**B**	**b**	x	y	e_1	e_2	t
40	x	3/5	1	0	3/5	1/5	0
30	y	22/5	0	1	2/5	-1/5	1
	Z_i	156	40	30	36	2	-M
	C_i-Z_i		0	0	-36	-2	0

- La solution réalisable : B_3 (3/5, 22/5, 0, 0)
- Le profit optimal : 156