Corrigé Type.

Exercice 01.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{10}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$$

1/

Les pôles du système sont : $s_1 = 0$, $s_2 = -\alpha$ et $s_3 = -\beta$.

le système est instable à cause du pôle $s_1 = 0$.

les zéros n'existe pas

2/

$$G(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{10}{s(s+\alpha)(s+\beta)} = \frac{10}{s^3 + (\alpha+\beta)s^2 + \alpha\beta s}$$

$$s^3 Y(s) + (\alpha+\beta) s^2 Y(s) + \alpha\beta s Y(s) = 10\, u(s)$$

$$\dddot{y}(t) + (\alpha+\beta)\ddot{y}(t) + \alpha\beta\dot{y}(t) = 10\, u(t) \quad ---- (1).$$

Posons

3/

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$x_3(t) = \ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t)$$

$$\text{de } (1) \longrightarrow \dddot{y}(t) = -(\alpha+\beta)\underbrace{\ddot{y}(t)}_{x_3} - \alpha\beta\underbrace{\dot{y}(t)}_{x_2} + 10\, u(t)$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

4- le système est commandable $\Rightarrow$ La matrice de commandabilité

Q_c doit être à rang plein

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \\ 0 & \alpha\beta(\alpha+\beta) & (\alpha+\beta)^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -10(\alpha+\beta) \\ 10 & -10(\alpha+\beta) & 10(\alpha+\beta)^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(Q_c) \Rightarrow 10\left[100(\alpha+\beta)^2 - 100(\alpha+\beta)^2\right] = 0$$

$\Rightarrow$ rang$(Q_c) = 2 <$ L'ordre du système

$\Rightarrow$ le système n'est pas commandable $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 02.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

1/ L'ordre du système $n = 3$

nombre d'entrées $m = 2$.

nombre de sorties $p = 2$.

2/ $$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right].$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\left[\operatorname{adj}(sI-A)\right]^T}{\det(sI-A)}.$$

$$sI-A = \begin{bmatrix} s+2 & -1 & -5 \\ 0 & s & 3 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ -s & s(s+2) & 0 \\ -3+5s & -3(s+2) & s(s+2) \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = s^2(s+2)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 & -s & -3+5s \\ 0 & s(s+2) & -3(s+2) \\ 0 & 0 & s(s+2) \end{bmatrix}}{s^2(s+2)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s(s+2)} & \frac{-3+5s}{s^2(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s} & -\frac{3}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+2} & \frac{\beta_1}{s^2} + \frac{\beta_2}{s} + \frac{\gamma}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{3}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

avec

$$\alpha_1 = \lim_{s \to 0} s\left(-\frac{1}{s(s+2)}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \lim_{s \to -2} (s+2)\left(-\frac{1}{s(s+2)}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\beta_1 = \lim_{s \to 0} s^2\left(\frac{-3+5s}{s^2(s+2)}\right) = -\frac{3}{2}.$$

$$\beta_2 = \lim_{s \to 0} \left[\frac{d}{ds} s^2\left(\frac{-3+5s}{s^2(s+2)}\right)\right] = \lim_{s \to 0} \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{-3+5s}{s+2}\right)\right]$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{5(s+2)-(-3+5s)}{(s+2)^2}\right) = \frac{13}{4}.$$

$$\gamma = \lim_{s \to -2} (s+2)\left(\frac{-3+5s}{s^2(s+2)}\right) = -\frac{13}{4}.$$

$$\Rightarrow (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} & -\frac{3}{2s^2} + \frac{13}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) \\ 0 & \frac{1}{s} & -\frac{3}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = TL^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -\frac{1}{2}(1-e^{-2t}) & -\frac{3t}{2} + \frac{13}{4}(1-e^{-2t}) \\ 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3/ Calcule des valeurs propres

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -5 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -2$ $\Rightarrow$ le système instable à cause du pôle double $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

4- $x(t) = e^{At} x(0)$ avec $x(0) = [0, 0, 1]^T$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} -\frac{3t}{2} + \frac{13}{4}\left(1 - e^{-2t}\right) \\ -3t \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad (t > 0).$$